محمدتقی طاهری تنجانی

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

اشاره

در سال نهم و در درس ریاضی با مفاهیم چندجمله‌ای و تقسیم چندجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در این مقاله سعی ما بر آن است که ضمن توسعهٔ مفاهیم مربوطه، به نکاتی در مورد بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها و مسائلی در این رابطه بپردازیم.

یک چندجمله‌ای برحسب متغیر x و از درجهٔ n (n عدد صحیح نامنفی است) به‌صورت $P(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰$ تعریف می‌شود که در آن $a_n,...,a_۲,a_۱,a_۰$ عددهای حقیقی‌اند و ضرایب چندجمله‌ای نامیده می‌شوند. در ضمن: $a_n\neq ۰$. برای آنکه چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، باید قطعاً جمله‌ای شامل x^n موجود باشد.

تساوی دو چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ در صورتی برابرند که درجهٔ دو چندجمله‌ای با هم برابر و ضریب‌های متناظر با هم برابر باشند.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

در ریاضی پایهٔ نهم با الگوریتم خاصی که دو چندجمله‌ای را برهم تقسیم می‌کرد، آشنا شدید. برای مثال، به منظور تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=۳x^۴-x^۳+۲x+۵$ بر $Q(x)=x^۲-۲$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
۳x^۴-x^۳+۲x+۵ & x^۲-۲ \\ \cline{2-2}
۳x^۴-۶x^۲ & ۳x^۲-x+۶ \\ \cline{1-1}
-x^۳+۶x^۲+۲x+۵ & \\
-x^۳+۲x & \\ \cline{1-1}
\qquad ۶x^۲+۵ & \\
\qquad ۶x^۲-۱۲ & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ۱۷ &
\end{array}
$$

عمل تقسیم چندجمله‌ای‌ها شباهت زیادی به عمل تقسیم در عددهای صحیح دارد. «رابطهٔ تقسیم» فوق را می‌توان به این صورت نوشت: $P(x)=(۳x^۲-x+۶)Q(x)+۱۷$. در حالت کلی، قضیهٔ زیر که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم، همواره برقرار است.

قضیه: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنیم، چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $t(x)$ و $R(x)$ چنان وجود دارند که:

$$P(x)=t(x).Q(x)+R(x)$$

که در آن: $P(x)$ مقسوم، $Q(x)$ مقسوم‌علیه، $t(x)$ خارج‌قسمت و $R(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم است.

تذکر:
باقی‌ماندهٔ تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک چندجمله‌ای یا صفر است و یا درجهٔ باقی‌مانده، کمتر از درجهٔ مقسوم‌علیه است.

مثال ۱. با استفاده از قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم $P(x)=۳x^۴-x^۳+۲x+۵$ را بر $Q(x)=x^۲-۲$ به‌دست آورید.

حل: چون درجهٔ $P(x)$ برابر ۴ و درجهٔ $Q(x)$ برابر ۲ است، پس درجهٔ خارج‌قسمت ۲ می‌شود. از طرف دیگر، چون درجهٔ باقی‌مانده باید از درجهٔ مقسوم‌علیه (یعنی ۲) کمتر باشد، پس باقی‌مانده یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر یک است. فرض می‌کنیم: $t(x)=a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ و $R(x)=b_۱x+b_۰$. باید مقادیر

a_iها و b_iها را پیدا کنیم. طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$P(x)=t(x)Q(x)+R(x)$$
$$۳x^۴-x^۳+۲x+۵$$
$$=(a_۲x^۲+a_۱x+a_۰)(x^۲-۲)+b_۱x+b_۰$$

دو طرف وقتی با هم برابرند که پس از ساده‌سازی، ضریب هر توان x در دو طرف یکسان باشد. پس از ساده‌سازی طرف دوم می‌توان نوشت:

$$۳x^۴-x^۳+۲x+۵$$
$$=a_۲x^۴+a_۱x^۳+(a_۰-۲a_۲)x^۲+(b_۱-۲a_۱)x-۲a_۰+b_۰$$

با برابر قرار دادن ضرایب متناظر در دو طرف تساوی نتایج زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_۲=۳ \\ a_۱=-۱ \\ a_۰-۲a_۲=۰ \\ b_۱-۲a_۱=۲ \\ -۲a_۰+b_۰=۵ \end{cases}$$

از تساوی‌های فوق داریم: $a_۰=۶$، $a_۱=۰$ و $b_۰=۱۷$

بنابراین: $t(x)=۳x^۲-x+۶$ و $R(x)=۱۷$.

ما در سطرهای بالاتر این تقسیم را به‌روش متداول حل کرده‌ایم. می‌توانید جواب‌ها را مقایسه کنید و از صحت عملیات مطمئن شوید.

مثال ۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{۷۰}+۲x^{۱۰}+۳$ بر $Q(x)=x-۱$ را به‌دست آورید.

حل: آیا می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؟ واضح است که عملیات بسیار طولانی خواهد شد. از روش متداول تقسیم دو چندجمله‌ای نیز کار بسیار زمان‌بر خواهد بود. ولی با استفاده از قضیهٔ تقسیم می‌توانیم راهی بسیار کوتاه برای این مثال بیابیم: در اینجا باقی‌مانده صفر یا از درجهٔ صفر است. در هر حال یک عدد ثابت است. فرض کنیم: R(x)=a. اگر t(x) را خارج‌قسمت در نظر بگیریم، داریم:

$$P(x)=t(x).Q(x)+R(x)$$
$$x^{۷۰}+۲x^{۱۰}+۳=(x-۱)t(x)+a$$

تساوی اخیر برای هر عدد حقیقی x برقرار است؛ از جمله x=۱. با این جای‌گذاری داریم:

$$۱^{۷۰}+۲(۱)^{۱۰}+۳=۰\times t(x)+a\Rightarrow a=۶$$

پس: $R(x)=۶$

به‌طور کلی می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $Q(x)=ax+b$ برابر است با: $P(\frac{-b}{a})$.

مثال ۳. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x) = x^4 - 6x^2 + x + a$ بر $2x - 4$ برابر ۵ باشد، مقدار a را تعیین کنید.

حل: طبق قضیهٔ بالا ریشهٔ مقسوم‌علیه را در عبارت مقسوم قرار می‌دهیم. این مقدار همان باقی‌ماندهٔ تقسیم است:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$P(2) = 5 \Rightarrow 16 - 24 + 2 + a = 5 \Rightarrow a = 11$$

بخش‌پذیری: هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است.

برای مثال، چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است، زیرا $P(-1) = 0$.

در قضیهٔ بالا مشاهده شد که برای پیدا کردن باقی ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را به‌دست آوریم و آن را در مقسوم جای‌گذاری کنیم. برای حالاتی که درجهٔ مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از یک باشد. چه باید کرد؟ با ذکر مثالی این مطلب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت زیر را بر $x^2 - 1$ تعیین کنید.

$$P(x) = 4x^{10} - 3x^5 + 2x + 1$$

حل: در روش اول می‌توان باقی‌مانده را $R(x) = ax + b$ در نظر گرفت و با نوشتن رابطهٔ تقسیم و متحد قرار دادن ضرایب به $R(x) = 2x + 2$ رسید.

ما این مسئله را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم تا به یک قاعدهٔ کلی هم برسیم. فرض کنیم $R(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ باشد. داریم:

$$P(x) = (x^2 - 1) \times t(x) + R(x)$$

می‌دانیم که به ازای دو عدد x_1 و x_2 داریم: $x^2 = 1$. با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$P(x_1) = R(x_1), P(x_2) = R(x_2)$$

حال اگر در چندجمله‌ای $P(x)$ به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم، به یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر یک مانند $M(x)$ می‌رسیم و داریم:

$$M(x_1) = P(x_1),\ \ M(x_2) = P(x_2)$$

زیرا x_1 و x_2 در رابطهٔ $x^2 = 1$ که در چندجمله‌ای $P(x)$ جای‌گذاری کرده‌ایم، صدق می‌کنند.

تا اینجا دریافتیم که دو چندجمله‌ای حداکثر درجهٔ یک M و P وجود دارند که به ازای دو مقدار x_1 و x_2 با هم برابرند. پس $M(x)=R(x)$ و $M(x)$ همان چندجمله‌ای است که از جای‌گذاری به جای x^2 در $P(x)$ حاصل شده است:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$P(x) = 4(x^2)^5 - 3x(x^2)^2 + 2x + 1$$

$$= 4(1)^5 - 3(1)^2 + 2x + 1 = 2x + 2$$

تذکر:
در مطلب بالا از این نکته استفاده شد که طبق خواص چندجمله‌ای‌ها، اگر دو چندجمله‌ای از حداکثر درجهٔ n، در n+1 مقدار برابر باشند، همواره با هم برابرند.

مثال ۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم زیر را بر $x^2 + 1$ به‌دست آورید.

$$P(x) = x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + x + 1$$

حل: مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x^2 + 1 = 0$. این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، اما می‌توان نوشت: $x^2 = -1$. حال در عبارت $P(x)$ به‌جای x^2 عدد (۱-) را قرار می‌دهیم.

$$P(x) = x(x^2)^4 + x(x^2)^3 + (x^2)^2 + x(x^2) + x + 1$$

$$\text{باقی‌مانده} = P(x^2 = -1) = x(-1)^4 + x(-1)^2 + (-1)^2 + x(-1) + x + 1$$

$$\text{باقی‌مانده} = R(x) = x + x + 1 - x + x + 1 = 2x + 2$$

همان‌طور که در مثال بالا مشاهده شد، اگر در تقسیم عبارت $P(x)$ بر $Q(x)$ مقسوم‌علیه ریشه نداشته باشد، آن را برحسب بزرگ‌ترین درجهٔ مقسوم‌علیه حل می‌کنیم و در مقسوم قرار می‌دهیم.

مثال ۶. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $P(x) = (x+1)^{2n-1} + x^{n+1}$ بر $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \\ x + 1 = -x^2 \end{cases}$$

با جای‌گذاری نتایج بالا در $P(x)$ داریم:

$$P(x) = (x+1)^{2n-1} + x^{n+1} = (-x^2)^{2n-1} + x^{n+1}$$

$$= -x^{4n-2} + x^{n+1} = x^{n+1}(-x^{3n-3} + 1)$$

$$= x^{n+1}(-(x^3)^{n-1} + 1) = x^{n+1}(-(1)^{n-1} + 1)$$

$$= x^{n+1}(-1 + 1) = 0$$

باقی‌مانده برابر صفر است و لذا $P(x)$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است.

در پایان به بررسی یک اتحاد مهم که در بخش مشتق در درس ریاضی ۳ و حسابان از آن استفاده می‌شود، می‌پردازیم:

مثال ۷. الف) نشان دهید a^n-1 بر $a-1$ بخش‌پذیر است ($n\in N$).

ب) ثابت کنید:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+...+a^2+a+1)$$

پ) اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به -a نتیجه بگیرید:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1)$$

ت) با فرض $a=\frac{x}{y}$ و استفاده از قسمت‌های ب و پ ثابت کنید:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-yx^{n-2}+...-y+1)$$

حل: الف)

$$P(a)=a^n-1$$

$$a-1=0\Rightarrow a=1\Rightarrow P(1)=1^n-1=0$$

ب) فرض کنیم: $S=1+a+a^2+...+a^{n-1}$. با ضرب طرفین در a و محاسبهٔ aS-S داریم:

$$\begin{cases}aS=a+a^2+a^3+...+a^n\\ S=1+a+a^2+...+a^{n-1}\end{cases}$$

$$aS-S=a^n-1\Rightarrow S(a-1)=a^n-1$$

$$(a-1)(a^{n-1}+...+a^2+a+1)=a^n-1$$

پ) با تبدیل a به -a در قسمت قبل داریم:

$$(-a)^n-1=(-a-1)((-a)^{n-1}+...+(-a)^2-a+1)$$

اگر n فرد باشد داریم:

$$-a^n-1=-(a+1)(a^{n-1}-...+a^2-a+1)$$

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-...+a^2-a+1)$$

ت) داریم:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+...+a^2+a+1)$$

با تبدیل a به $\frac{x}{y}$ داریم:

$$(\frac{x}{y})^n-1=(\frac{x}{y}-1)((\frac{x}{y})^{n-1}+...+(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})+1)$$

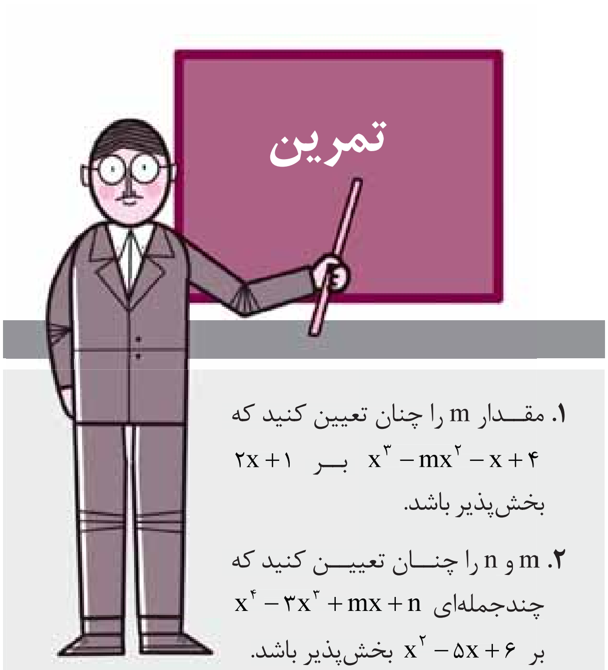
طرفین عبارت را در y^n ضرب و سپس ساده می‌کنیم:

$$x^n-y^n=y(\frac{x}{y}-1)\times y^{n-1}((\frac{x}{y})^{n-1}+...+(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})+1)$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+...+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

اگر n فرد باشد، با تبدیل y به -y می‌توان به اتحاد دیگر خواسته شده در این قسمت رسید.

حالا شما می‌توانید تمرین‌های زیر را خودتان انجام دهید:



۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که x^3-mx^2-x+4 بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۲. m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم x^{1397} را بر x^2+x+1 به‌دست آورید.

۴. نشان دهید $a^{49}+b^{21}$ بر a^7+b^3 بخش‌پذیر است.

۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{10}$ را بر عبارت جبری زیر به‌دست آورید.

$$Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

۶. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای P(x) بر x+3 و x-2 به ترتیب ۲ و ۷ باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم P(x) بر x^2+x-6 را به‌دست آورید.

۷. اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax+1$ بر x^2-3x+b بخش‌پذیر باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

منابع

۱. اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید (۱۳۸۹). **حسابان** سال سوم آموزش متوسطهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۲. صفایی، نوید و عسگری، علی (۱۳۸۹). **حسابان** (ج ۱). مؤسسهٔ الگوی توسعهٔ نمونه. تهران. چاپ دوازدهم.

۳. رضوی، مجید (۱۳۸۶). **حسابان**. انتشارات قندیل. تهران.